

Л. Ю. Науменко¹, К. Ю. Костриця¹, М. А. Арбузов², А. О. Маметьев³

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ ПРОКСИМАЛЬНОГО МІЖФАЛАНГОВОГО СУГЛОБА ПАЛЬЦЯ КИСТІ ПРИ РІЗНИХ ВИДАХ ТУГОРУХОМОСТІ

¹ ДЗ «Дніпропетровська медична академія МОЗ України», Дніпро, Україна,

² Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна, Дніпро, Україна,

³ ДЗ «Український державний НДІ медико-соціальних проблем інвалідності
МОЗ України», Дніпро, Україна

УДК 616.717.9-008:612.7:519.876.5

Л. Ю. Науменко¹, К. Ю. Костриця¹, М. А. Арбузов², А. А. Маметьев³

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ПРОКСИМАЛЬНОГО МЕЖФАЛАНГОВОГО СУСТАВА ПАЛЬЦА КИСТИ ПРИ РАЗНЫХ ВИДАХ ТУГОПОДВИЖНОСТИ

¹ ГУ «Днепропетровская медицинская академия МЗ Украины», Днепр, Украина,

² Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, Днепр, Украина,

³ ГУ «Украинский государственный НИИ медико-социальных проблем инвалидности МЗ Украины», Днепр, Украина

Цель работы — построить математическую модель работы проксимального межфалангового (ПМФ) сустава, основанную на законе сохранения энергии, для определения внешней работы, необходимой для преодоления сопротивления в суставе при различных видах контрактур.

С помощью построенной математической модели работы ПМФ сустава, основанной на законе сохранения энергии, можно определить необходимое усилие для преодоления той или иной степени тугоподвижности. Измерив величину силы F_{α} (внутреннего усилия), можно вычислить соответствующую внешнюю силу F_{ϕ} внешнего механического устройства, необходимую для движения фаланг пальца при различных видах тугоподвижности при любом угле сгибания фаланги в ПМФ суставе.

Ключевые слова: тугоподвижность межфаланговых суставов пальцев кисти, математическое моделирование, закон сохранения энергии.

UDC 616.717.9-008:612.7:519.876.5

L. Yu. Naumenko¹, K. Yu. Kostrytsia¹, M. A. Arbuzov², A. O. Mametiev³

MATHEMATICAL MODELING OF THE WORK OF THE PROXIMAL INTERPHALANGEAL JOINT OF THE FINGER AT VARIOUS TYPES OF STIFFNESS

¹ The Dnepropetrovsk Medical Academy MH of Ukraine, Dnipro, Ukraine,

² V. Lazaryan Dnepropetrovsk National University of Railway Transport, Dnipro, Ukraine,

³ SI "Ukrainian State Research Institute of Medicinal and Social Problems of Invalidness MH of Ukraine", Dnipro, Ukraine

To study the development of contractures of the finger joints of the fingers, we created a mathematical model for the operation of the proximal interphalangeal (PIP) joint of the finger of the hand.

The purpose of the work: to build a mathematical model of the work of the PIP joint, based on the law of conservation of energy, to determine the external work needed to overcome resistance in the joint for various types of contractures.

Materials and methods. The mathematical model is implemented in the MS Excel software product, for which a system of equations of static equilibrium of the system is created. The model is based on the law of conservation of energy. Different types of limitation of mobility in the hinge, simulating the interphalangeal joint, are modeled by a change in the stiffness parameters.

Results. The model connects the main parameters of the work of the PIP joint, reflects the relationship between these parameters and allows us to investigate physical patterns. The model includes active and passive forces, so it allows modeling the effect of external fixation devices in the treatment of contractures. Also, the model includes the rigidity of the tendon, the coefficient of friction of the



tendon in the canal, the elasticity of the skin, the stiffness of the joint, which allows modeling various types of stiffness of the interphalangeal joint.

Conclusions. With the help of the constructed mathematical model of the operation of the joints based on the law of conservation of energy, it is possible to determine the necessary effort to overcome some degree of stiffness. By measuring the force F_α (internal force), it is possible to calculate the corresponding external force F_f of the external mechanical device necessary for the movement of phalanges of the finger in various types of stiffness at any angle of flexion of the phalanx in the PIP joint.

Key words: stiffness of interphalangeal finger joints of the hand, mathematical modeling, law of conservation of energy.

Для вивчення процесу розвитку контрактур суглобів пальців кисті виконуються різні типи експериментальних досліджень. Найбільш економічно вигідним і тим, що розкриває сутність фундаментального дослідження, є математичне моделювання [1–5]. Для вивчення патологічного процесу нами спільно з науковцями випробувального центру Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна створена математична модель роботи проксимального міжфалангового (ПМФ) суглоба пальця кисті.

Мета роботи — побудувати математичну модель роботи ПМФ суглоба, що основана на законі збереження енергії, для визначення зовнішньої роботи, необхідної для подолання опору в суглобі при різних видах контрактур.

Матеріали та методи дослідження

Під час згинання і розгинання пальця переміщення дистальної та проксимальної фаланг відбувається в одній площині. Анатомічно суглоби пальців влаштовані так, що можна умовно провести в суглобі вісь обертання фаланги. Тому, з точки зору механіки, палець може бути представлений як плоска шарнірно-важельна система (рис. 1), до якої може бути застосований закон збереження енергії [3].

Фізіологічне положення кисті є енергетично вигідним. Кут α_0 — кут спокою проксимального суглоба пальця.

Для зміни кута спокою на величину $\Delta\alpha$ необхідна витрата енергії E_A , що дорівнює внутрішній роботі м'язів, які, скорочуючись, приводять в обертальний рух дистальну фалангу пальця через сухожилки, створюючи крутний момент M_α . Така робота є активною. У випадку приведення фаланг пальців у рух зовнішнім механічним приладом активну роботу будуть виконувати зовнішні сили. При цьому механічним приладом буде виконана

зовнішня робота $A_{\text{зовн}}$. Тоді енергія активних сил

$$E_A = M_\alpha \Delta\alpha / 2 + A_{\text{зовн}}$$

Згідно з принципом збереження енергії, E_A трансформується в енергію пасивних сил $E_{\text{п}}$, тобто

$$E_A = E_{\text{п}}$$

Крутний момент M_α утворюється силою F_α , яка розвивається м'язами й передається по сухожилку. Загальна причина утворення крутного моменту від дії сили в механічних системах полягає в тому, що напрямок дії сили не проходить через точку обертання. Враховуючи анатомічні особливості згинально-розгинального апарату пальця кисті та принципи механіки, можна сформулювати розрахункову схему утворення крутного моменту M_α (рис. 2), де сухожилки представлені ниткою, а фаланги — твердими тілами.

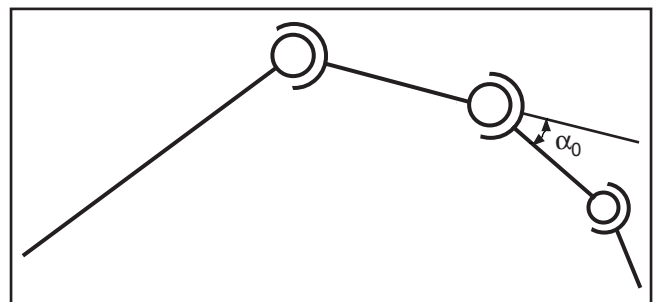


Рис. 1. Шарнірна схема пальця

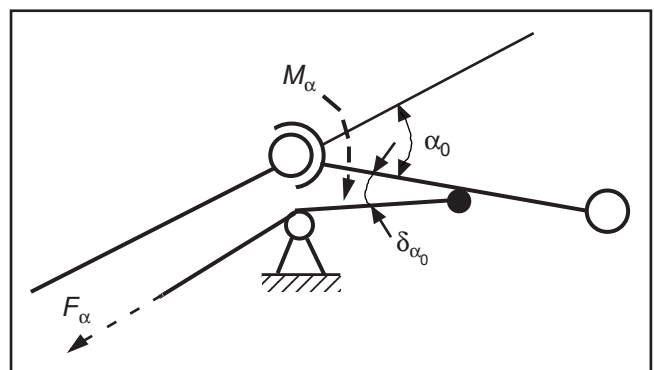


Рис. 2. Розрахункова схема утворення крутного моменту M_α

З ростом кута α збільшується кут кріплення сухожилка δ_α , тобто $\delta_\alpha = f(\alpha)$. Закон зміни кута кріплення сухожилка може бути описаний законом:

$$\delta_\alpha = \alpha/2.$$

Сила F_α може бути розкладена на складові F_α^x та F_α^y (рис. 3).

Згідно з рис. 3, система рівнянь з розкладання сили F_α буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} F_\alpha^x &= F_\alpha \cos \delta_\alpha; \\ F_\alpha^y &= F_\alpha \sin \delta_\alpha. \end{aligned}$$

тоді момент

$$M_\alpha = a_x F_\alpha \sin \delta_\alpha + a_y F_\alpha \cos \delta_\alpha.$$

де F_α — зусилля в сухожилках;

a_x, a_y — геометричні параметри кріплення сухожилків.

Робота пасивних сил E_p складається з роботи сил опору кутовим переміщенням в суглобі E_c , роботи сил тертя сухожилків у каналах $E_{тж}$, роботи деформації м'яких тканин шкіри E_t , роботи деформації сухожилків $E_{дж}$ і фізичної роботи $E_{ф}$, що виконується пальцем:

$$E_p = E_c + E_{тж} + E_t + E_{дж} + E_{ф}.$$

Розглянемо складові окремо.

При скороченні м'язів виникає сила F_α , що деформує сухожилки як пружне тіло. При цьому деформація сухожилків підкоряється закону Гука:

$$F_\alpha = kx,$$

де k — коефіцієнт пропорційності, x — величина деформації сухожилків при дії активної сили.

Енергія деформації сухожилків тоді буде визначатися як

$$E_{дж} = kx^2/2,$$

або

$$E_{дж} = F_\alpha^2/2k.$$

Коефіцієнт пропорційності k — це поздовжня жорсткість сухожилка.

Робота сил тертя сухожилка у каналі $E_{тж}$ визначається як добуток сили тертя $F_{тж}$ і переміщення сухожилка в каналі.

$$E_{тж} = F_{тж} \cdot S_{ж}.$$

Сила тертя сухожилка у каналі

$$F_{тж} = N \cdot \mu,$$

де N — реакція каналу;

μ — коефіцієнт тертя сухожилка в каналі.

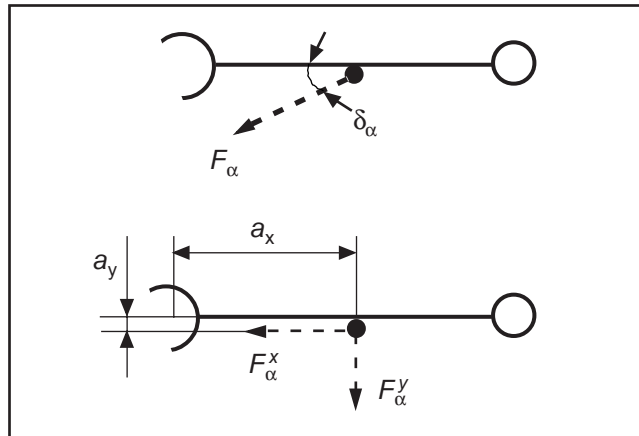


Рис. 3. Розрахункова схема розкладання зусилля в сухожилку F_α

Робота каналу може бути представлена розрахунковою схемою (рис. 4). Сила F_α направлена паралельно проксимальній фаланзі. Вектор реакції каналу N є бісектрисою кута $(180 - \alpha_0 + \delta_\alpha)$, де кут $(\alpha_0 - \delta_\alpha)$ є кутом згинання сухожилків у суглобі. Реакція N відображає сумарну реакцію всього каналу.

$$\begin{aligned} N &= 2F_\alpha \cos\left(\frac{180 - \alpha_0 + \delta_\alpha}{2}\right) = \\ &= 2F_\alpha \sin\left(\frac{\alpha_0 - \delta_\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

У положенні розгинання $N = 0$, тому деякі автори нехтують цими силами. Проте при розгляді кисті в робочому стані N не дорівнює 0.

Робота сил опору кутовим переміщенням $\Delta\alpha$ у суглобі

$$E_c = \frac{m_c \Delta\alpha^2}{2},$$

де m_c — коефіцієнт пропорційності між крутним моментом M_α та зміною кута спокою $\Delta\alpha$, тобто $M_\alpha = m_c \Delta\alpha$.

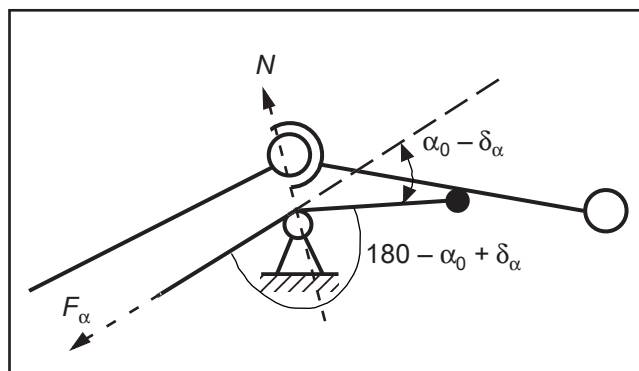


Рис. 4. Розрахункова схема розкладання





Рис. 5. Залежність внутрішнього зусилля від зовнішнього навантаження за фізичним експериментом (а) та математичною моделлю (б)

Робота деформації м'яких тканин

$$E_T = \frac{k_T \Delta \alpha^2}{2},$$

де k_T — коефіцієнт пропорційності між силою, що деформує м'які тканини, та зміною довжини шкіри.

Фізична робота дорівнює добутку зовнішньої сили F_ϕ , прикладеної до дистального суглоба, та його лінійного переміщення S_c :

$$E_\phi = F_\phi \cdot S_c$$

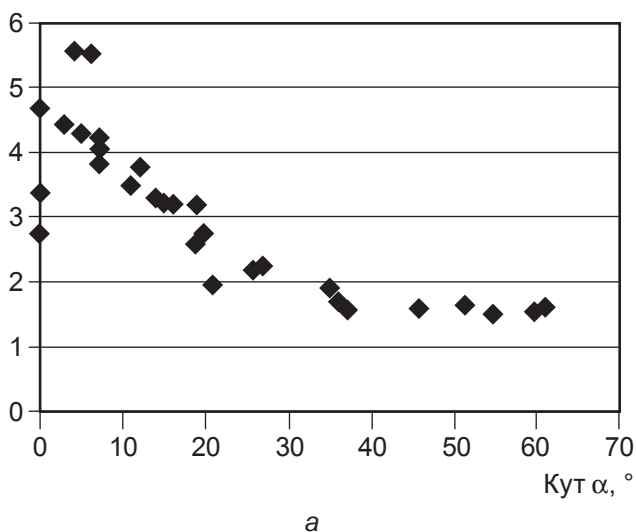
Отже, різні види обмеження рухомості в шарнірі, що імітує міжфаланговий суглоб, моделюються зміною коефіцієнтів μ , k_T та m_c .

Дана математична модель реалізована в програмному продукті MS Excel. Користувач вводить вихідні дані, які можна легко отримати за допомогою гоніометра і динамометра, а програма автоматично вираховує результати.

Адекватність побудованої моделі була перевірена шляхом порівняння результатів фізичного експерименту (рис. 5, а; 6, а) з результатами розрахунку математичної моделі (рис. 5, б; 6, б).

Порівнюючи графіки фізичного експерименту та математичної моделі, можна відзначити достатню схожість результатів.

Відношення внутрішнього зусилля до зовнішнього навантаження



Відношення внутрішнього зусилля до зовнішнього навантаження

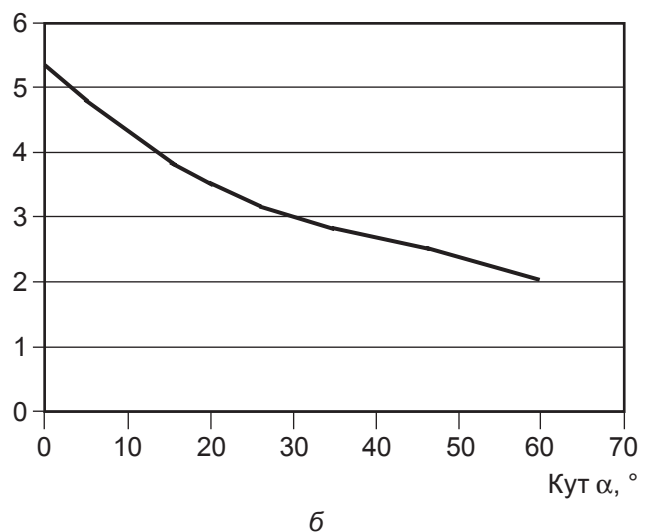


Рис. 6. Залежність відношення внутрішнього зусилля до зовнішнього навантаження від кута згинання α за фізичним експериментом (а) та математичною моделлю (б)

Результати дослідження та їх обговорення

На рис. 7 показано результати моделювання обмеження рухомості шарніра за допомогою запропонованої математичної моделі, залежність внутрішнього зусилля F_{α} , необхідного для подолання опору крутного моменту в шарнірі M_{α} , що моделює контрактуру, при різних кутах α .

Аналізуючи графік, можна відзначити, що певний рівень тугорухомості в шарнірі, тобто певне значення крутного моменту при куті $\alpha = 60^\circ$ долається внутрішнім зусиллям, що моделює роботу м'язів-згиначів, в 1,7 разу легше, ніж при куті $\alpha = 5^\circ$.

Дана модель дозволяє визначити необхідне зусилля для подолання того чи іншого ступеня контрактури. Наприклад, при жорсткості ПМФ суглоба 10 Н·см і положенні середньої фаланги під кутом 5° згинання необхідно розвинути зусилля 5,7 Н для здійснення рухів у суглобі, а при положенні фаланги під кутом 60° згинання необхідно розвивати 4,3 Н. При жорсткості 20 Н·см і положенні середньої фаланги під кутом 5° необхідно розвинути зусилля 12,8 Н, а при положенні фаланги під кутом 60° згинання необхідно розвивати 9,7 Н. Отже, для подолання різних ступенів тугорухомості ПМФ суглоба при положенні середньої фаланги під кутом 60° необхідно прикладати на 25 % менше зусилля, ніж при менших кутах згинання в суглобі.

Таким чином, дана математична модель пов'язує між собою основні параметри роботи ПМФ суглоба, відображає зв'язки між цими параметрами та дозволяє досліджувати фізичні закономірності. Модель включає активні та пасивні сили, тому дозволяє моделювати вплив апаратів зовнішньої фіксації при лікуванні контрактур. Також модель включає жорсткість сухожилка, коефіцієнт тертя сухожилка в каналі, пружність шкіри, жорсткість суглоба, що дозволяє моделювати різні види тугорухомості міжфалангового суглоба.

Висновки

За допомогою побудованої математичної моделі роботи ПМФ суглоба, що ґрунтується на законі збереження енергії, можна визначити необхідне зусилля для подолання того чи іншого ступеня тугорухомості. Вимірявши величину сили F_{α} (внутрішнього зусилля), можна обчислити відповідну зовнішню силу F_{ϕ} , яка повинна надаватися зовнішнім механічним при-

Крутний момент, Н, см

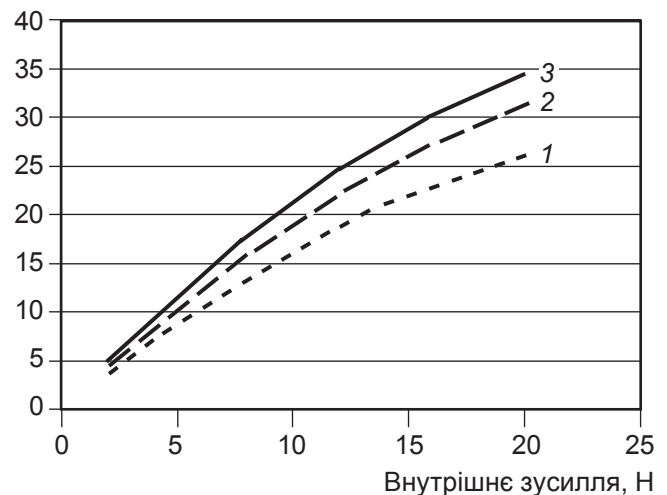


Рис. 7. Результати моделювання тугорухомості шарніра: 1 — $\alpha=5^\circ$; 2 — $\alpha=30^\circ$; 3 — $\alpha=60^\circ$

строєм для приведення в рух фаланги пальця при різних видах тугорухомості при будь-якому куті згинання фаланги в ПМФ суглобі.

Перспективи подальших наукових досліджень. Розроблена математична модель може бути використана для удосконалення методів лікування контрактур суглобів і розроблення нових пристроїв для подолання тугорухомості суглоба.

Конфлікт інтересів: відсутній.

Ключові слова: тугорухомість міжфалангових суглобів пальців кисті, математичне моделювання, закон збереження енергії.

ЛІТЕРАТУРА

- Ежов М. Ю., Берендеев Н. Н., Петров С. В. Математическая модель развития изменений в суставных тканях при различных по интенсивности физических нагрузках. *Фундаментальные исследования*. 2013. № 7–3. С. 550–554.
- Розподіл зусиль у різних ділянках згинального апарату пальців кисті при стандартному навантаженні / І. А. Лазарев, І. М. Курінний, М. Л. Ярова та ін. *Травма*. 2013. Т. 14, № 6. С. 73–82.
- Самойлов И. А., Трегубов В. П. Математическое моделирование движения пальца кисти и управления со стороны нервной системы. *Процессы управления и устойчивости: труды XLVII международной научной конференции*. Санкт-Петербург, 2016. С. 122–127.
- Frigg, Roman and Hartmann, Stephan, "Models in Science", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition) / Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/models-science/>>.
- Liu DWC. Physics and Biology Collaborate to Color the World. *CBE Life Sciences Education*. 2013. Vol. 12 (2). P. 133–138. doi: 10.1187/cbe.13-03-0056.

REFERENCES

- Ezhov M.Yu., Berendejev N.N., Petrov S.V. Mathematical model of development to change sinarticular tissue sat



various intensity of physical activity. *Fundamental'nye issledovaniya* 2013; 7–3: 550-554 [in Russian].

2. Lazarev I.A., Kupinnyy I.M., Yarova M.L. Distribution of efforts in different parts of the flexural device of the finger sat standard load. *Travma* 2013; 14 (6): 73-82 [in Ukrainian].

3. Samoylov I.A., Tregubov V.P. Matematicheskoe modelirovaniye dvizheniya pal'tsa kisti i upravleniya so storony nervnoy sistemy [Mathematical modeling of the finger movement and the control of the nervous system]. *Trudy XLVII mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Protssesy upravleniya i ustoychivost"*. 2016. P. 122-127. Saint Petersburg [in Russian].

4. Frigg, Roman and Hartmann, Stephan, "Models in Science", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition) / Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL=<<https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/models-science/>>.

5. Liu DWC. Physics and Biology Collaborate to Color the World. *CBE Life Sciences Education*. 2013; 12 (2): 133-138. doi: 10.1187/cbe.13-03-0056.

Надійшла до редакції 01.06.2018

*Рецензент д-р мед. наук, проф. Ю. В. Сухін,
дата рецензії 11.06.2018*

*Передплачуйте
і читайте*



ОДЕСЬКИЙ МЕДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Передплата приймається у будь-якому передплатному пункті

Передплатний індекс 48717

У випусках журналу:

- ◆ Теорія і експеримент
- ◆ Клінічна практика
- ◆ Профілактика, реабілітація, валеологія
- ◆ Новітні технології
- ◆ Огляди, рецензії, дискусії

